1. Präsenzübung zur Theoretischen Physik für Lehramt, WS 2010/11

(zu bearbeiten am Dienstag, 26.10.2010)

Aufgabe P01 *Addition von Steigungen und Geschwindigkeiten*

(a) In zwei Dimensionen habe ein kartesisches Koordinatensystem (x', y') mit seiner x-Achse eine Steigung m_1 gegen die x-Achse des Standard-Koordinatensystems (x, y). Betrachten Sie nun eine Ursprungsgerade G mit einer Steigung m_2 bezüglich (x', y'). Welche Steigung m_{tot} hat G bezüglich (x, y)?

Hinweise: Machen Sie eine Skizze. Leiten Sie eine Additionsformel für den Tangens ab.

(b) In 1+1 Dimensionen bewege sich ein Inertialsystem (t', x') mit Geschwindigkeit v_1 gegen ein Inertialsystem (t, x). Im System (t', x') hat eine Rakete R eine gleichförmige Geschwindigkeit v_2. Welche Geschwindigkeit v_{tot} besitzt R im System (t, x)?

Hinweise: Zeichnen Sie ein Raumzeit-Diagramm. Bestimmen Sie die relativen k-Faktoren und Rapiditäten und daraus die Geschwindigkeiten. Leiten Sie eine Additionsformel für den Tangens hyperbolicus ab.

Aufgabe P02 *Relativistische Raumfahrt*

Eine Rakete verlässt die Erde im Jahr 2010 auf gerader Linie zum 146 Lichtjahre entfernten Stern Markab (α Pegasi). Damit die Passagiere sich wohl fühlen, beschleunigt man stets mit der Erdbeschleunigung g. Zahlenwerte: $c = 1$, $g = 3.3 \cdot 10^{-8}\text{s}^{-1}$, 1 Jahr $= 3 \cdot 10^7$s. Nach fünf Raketenjahren wird die Beschleunigungsrichtung umgekehrt und für weitere fünf Raketenjahre mit $-g$ bis zum Stillstand gebremst. Unmittelbar danach geht es gleichermaßen zurück Richtung Erde: Fünf Raketenjahre lang mit $-g$ beschleunigt, dann genauso lange mit g gebremst, um auf der Erde zu landen. Welches Jahr schreibt man bei der Landung auf der Erde? Hat die Rakete ihr Ziel erreicht? Machen Sie eine Raumzeit-Skizze im Erd-System und tragen Sie dort die Weltlinie der Rakete sowie deren Geschwindigkeits- und Beschleunigungs-Vierervektor ein.

Hinweise:
Die Bahnkurve der Rakete wird in Eigenzeit τ parametrisiert. Ihr Zeit-Ort $s(\tau)$, Vierer-Geschwindigkeit $u(\tau)$ und Vierer-Beschleunigung $b(\tau)$ sind gegeben durch

$$s(\tau) = \begin{pmatrix} t(\tau) \\ x(\tau) \end{pmatrix}, \qquad u(\tau) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tau}(\tau) = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(\tau) = \gamma(\tau)\begin{pmatrix} 1 \\ v(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta(\tau) \\ \sinh\theta(\tau) \end{pmatrix}, \qquad b(\tau) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}(\tau)\,.$$

Erdbeschleunigung heißt $b^2 = -g^2 = \text{const}$ für den Vierervektor b. Integrieren Sie einmal, um $\theta(\tau)$ zu finden, und ein zweites Mal, um $t(\tau)$ und $x(\tau)$ zu erhalten. Im Erd-System zeichnen Sie die Weltlinie der Rakete als $x(t)$.